

Operación Económica de Sistemas de Potencia

Distribución de cargas entre unidades dentro de una central

Para determinar la distribución económica de la carga entre unidades de una central, (esencialmente térmica), el costo de operación de la unidad debe expresarse en función de la salida de potencia.

Dentro del costo de operación, el factor fundamental es el costo del combustible, existen otros costos que son función de la salida de potencia pero estos pueden incluirse en la expresión del costo de combustible.

En la fig. 1 puede verse una curva entrada-salida típica en una unidad generadora de una central.

Si se dibuja una línea desde el origen hasta cualquier punto de la curva se obtiene lo que llamamos: Proporción de calor que es la cantidad de kCal/h por MW de salida. La inversa de esa relación se llama Eficiencia del Combustible. La eficiencia máxima se consigue cuando la recta que pasa por el origen es tangente a la curva.

Si se multiplica esta curva por el precio del combustible (por ejemplo 12,36 \$/kCal), la curva representará la característica costo de combustible-generación

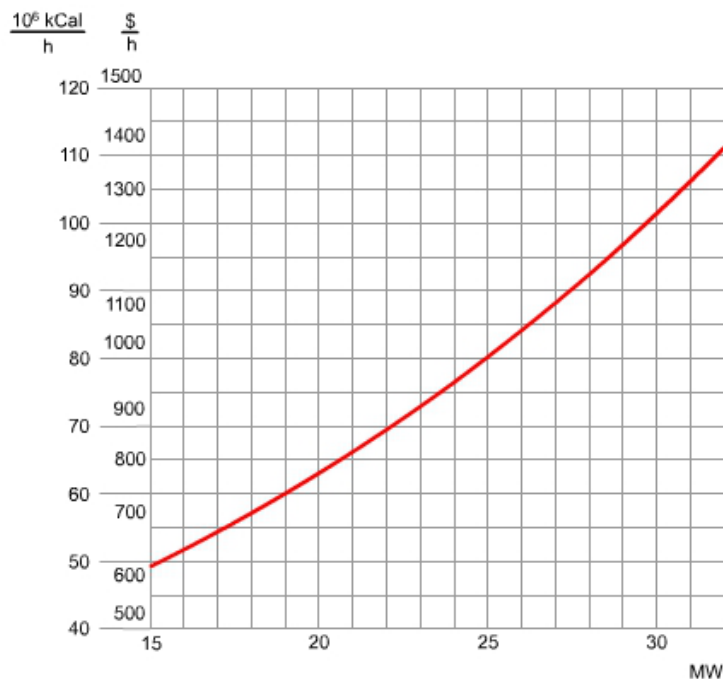


fig. 1

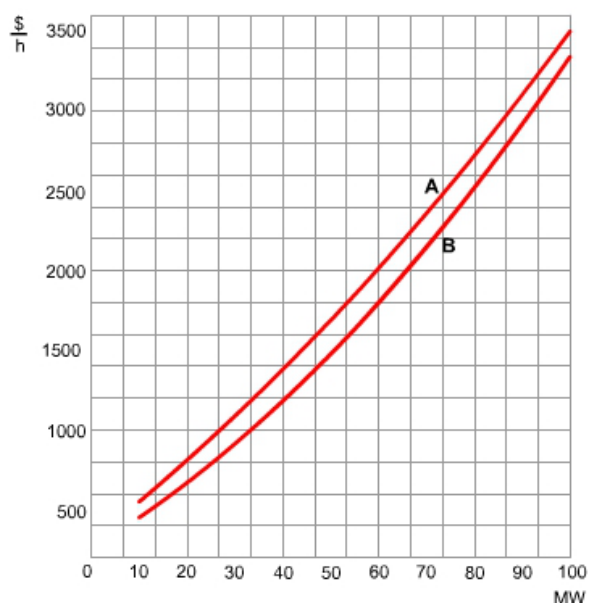
En el caso de dos unidades dentro de la misma central, cada una tendrá su propia curva de eficiencia, en la fig. 2 la característica costo de combustible-generación de la unidad B es mas eficiente que la de A

A priori, puede suponerse que lo más conveniente es cargar a la unidad más eficiente hasta su máxima potencia y luego incorporar la otra unidad, veamos el siguiente ejemplo:

Supongamos que las unidades combinadas deben entregar una potencia de 110 MW.

En la siguiente tabla se muestra el costo de combustible por hora para distintas distribuciones de carga:

UNIDAD A		UNIDAD B		Costo total de combustible
Generación	Costo de combustible	Generación	Costo de combustible	
MW	\$/h	MW	\$/h	\$/h
10	507	100	3365	3872
20	780	90	2942	3722
30	1067	80	2543	3610
40	1369	70	2170	3539
50	1686	60	1821	3507
60	2018	50	1497	3515
70	2364	40	1198	3562
80	2726	30	924	3650
90	3102	20	675	3777
100	3494	10	450	3944



Con el razonamiento anterior si la máquina B entrega 100 MW y la A 10 MW, vemos que el costo total de combustible asciende a 3782 \$/h el cual no es el menor valor posible. Si graficamos el costo total de combustible en función de la generación de B y hallamos el mínimo de la curva:

fig. 2

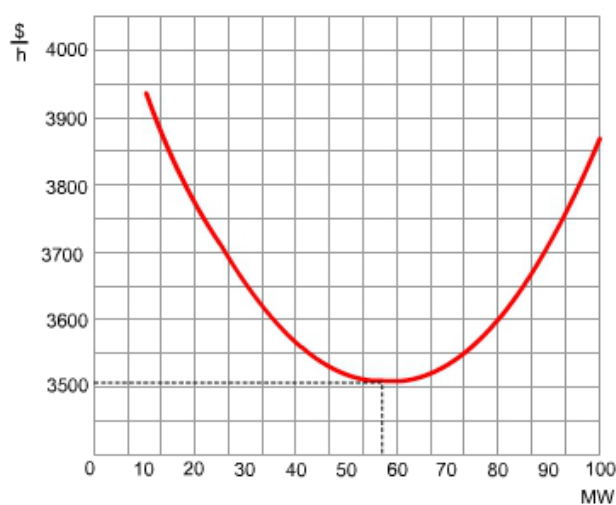


fig. 3

Se puede ver que la máxima eficiencia se obtiene cargando a la máquina B (más eficiente) en aproximadamente 57 MW y luego completar la potencia con la máquina A con los 53 restantes, lo que da un costo total de 3504 \$/h

Cuando se trata de varias unidades este método se hace engorroso, por lo que se aplica el método de los **Costos Incrementales**.

Para un sistema de m unidades que suministran una carga P_t :

$P_t = P_1 + P_2 + \dots + P_m = \sum_{j=1}^m P_j$ [1]. La carga total entregada es la suma de las cargas

de todas las unidades.

Los costos por hora de consumo de combustible pueden expresarse en función de la generación de cada unidad F_j , o sea: $F_1 = \varphi_1(P_1)$; $F_2 = \varphi_2(P_2)$; ...; $F_m = \varphi_m(P_m)$ y el

costo total F_t , será: $F_t = F_1 + F_2 + \dots + F_m = \sum_{j=1}^m F_j$ [2].

El problema consiste en distribuir las cargas entre unidades de manera que el costo sea mínimo.

Definiendo una constante nula: $\lambda \cdot (P_1 + P_2 + \dots + P_m - P_t) = 0$ y restándosela a F_t , la función no se altera: $F_t = F_1 + F_2 + \dots + F_m - \lambda \cdot (P_1 + P_2 + \dots + P_m - P_t)$ [3].

λ es un multiplicador de Lagrange y recibe el nombre de **Costo Incremental**.

Para obtener el mínimo de F_t , se deriva parcialmente respecto de las cargas P_j y se iguala a cero, así obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t}{\partial P_1} &= \frac{dF_1}{dP_1} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F_t}{\partial P_2} &= \frac{dF_2}{dP_2} - \lambda = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_t}{\partial P_m} &= \frac{dF_m}{dP_m} - \lambda = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Queda planteado un sistema de} \\ &\text{ecuaciones simultáneas que puede} \\ &\text{escribirse de la siguiente manera:} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dF_1}{dP_1} &= \lambda \\ \frac{dF_2}{dP_2} &= \lambda \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dF_m}{dP_m} &= \lambda \end{aligned} \right. \quad [5]$$

De lo expuesto podemos sacar las siguientes conclusiones:

El costo incremental, λ es igual a la derivada primera de la función costo de combustible-generación. A partir de la característica costo de combustible-generación se puede obtener un costo incremental para cada unidad.

Para que el costo sea mínimo, todas las unidades tienen que estar operando al mismo costo incremental y este valor tiene que ser tal que la suma de las generaciones de las unidades sea igual a la carga total.

El problema se resuelve hallando la solución al sistema de ecuaciones [6]

$$\left\{ \begin{aligned} P_t &= \sum_{j=1}^m P_j \\ \frac{dF_1}{dP_1} &= \lambda \\ \frac{dF_2}{dP_2} &= \lambda \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dF_m}{dP_m} &= \lambda \end{aligned} \right. \quad [6]$$

Queda sin embargo el problema de conocer la ecuación algebraica del costo de combustible en función de la generación. Para esto puede trazarse experimentalmente, la curva haciendo el cociente entre pequeños incrementos en costos de combustibles sobre los pequeños incrementos de generación correspondientes (se obtiene una aproximación a los costos incrementales). Tomando a estos cocientes como ordenadas y como abscisas a las generaciones correspondientes se obtiene la característica de costo incremental de combustible.

Generación	Costo de combustible	Incremento de la generación	Incremento del costo de combustible	Costo incremental de combustible	Generación correspondiente
P	F	ΔP	ΔF	$\frac{\Delta F}{\Delta P}$	$P + \frac{\Delta P}{2}$
MW	\$/h	MW	\$/h	\$/MWh	MW
15,0	610,0	2,5	78,0	31,2	16,25
17,5	688,0	2,5	88,0	35,2	18,75
20,0	776,0	2,5	98,5	39,4	21,25
22,5	874,5	2,5	108,8	43,5	23,75
25,0	983,3	2,5	119,5	47,8	26,25
27,5	1102,8	2,5	130,0	52,0	28,75
30,0	1232,8	2,5	138,8	55,5	31,00
32,5	1371,6	2,5			

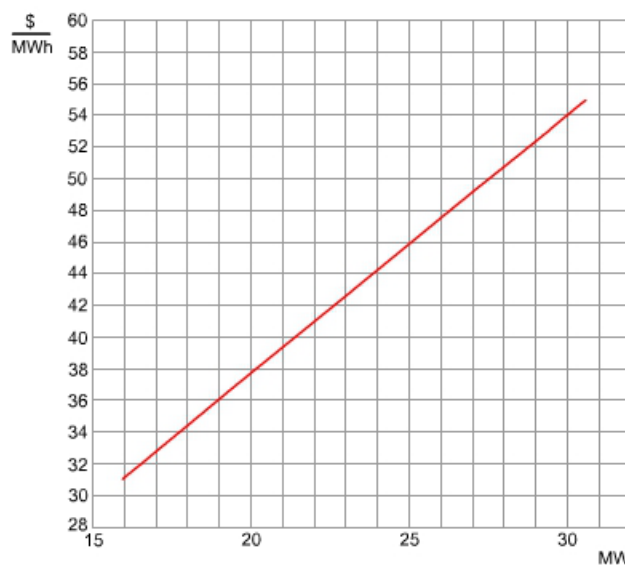


fig. 4

Ejemplo: Distribución económica de carga entre dos unidades

Las dos unidades del ejemplo anterior en paralelo, tienen las siguientes ecuaciones características de consumo de combustible-generación:

$$F_A = (0,006 \cdot P_A^2 + 2,016 \cdot P_A + 20,16) \cdot 10^6 \left[\frac{\text{kCal}}{\text{h}} \right]$$

$$F_B = (0,010 \cdot P_B^2 + 1,512 \cdot P_B + 20,16) \cdot 10^6 \left[\frac{\text{kCal}}{\text{h}} \right]$$

Donde F_A y F_B son los consumos de combustible de las unidades (A y B) y P_A y P_B son las generaciones respectivas.

La generación mínima de cada unidad es 10 MW y la máxima 100 MW. El precio del combustible es de 12,4 pesos por millón de kCal.

Suponer que la carga total conectada es de 110 MW. Determinar la distribución óptima de la carga entre las unidades de manera que el gasto de combustible sea mínimo.

Multiplicando las ecuaciones de consumo de combustible por el costo del mismo, obtenemos las ecuaciones del costo de combustible en función de la generación:

$$F'_A = 0,074 \cdot P_A^2 + 24,998 \cdot P_A + 249,984 \left[\frac{\$}{h} \right]$$

$$F'_B = 0,124 \cdot P_B^2 + 18,745 \cdot P_B + 249,984 \left[\frac{\$}{h} \right]$$

Derivamos estas ecuaciones respecto a la generación:

$$\frac{dF'_A}{dP_A} = 0,148 \cdot P_A + 24,998 \left[\frac{\$}{MWh} \right]$$

$$\frac{dF'_B}{dP_B} = 0,248 \cdot P_B + 18,745 \left[\frac{\$}{MWh} \right]$$

Sabemos que para que la carga se reparta en la forma más económica, las dos unidades deben funcionar al mismo costo incremental:

$$\begin{cases} 0,148 \cdot P_A + 24,998 = \lambda \\ 0,248 \cdot P_B + 18,745 = \lambda \\ P_A + P_B = 110 \end{cases}$$

$$0,148 \cdot P_A + 24,998 = 0,248 \cdot P_B + 18,745$$

$$P_B = 110 - P_A$$

$$0,148 \cdot P_A + 24,998 = 0,248 \cdot (110 - P_A) + 18,745$$

$$P_A = 53,098 \text{ MW}$$

$$P_B = 56,902 \text{ MW}$$

Despacho económico

La carga de una central puede ir variando de acuerdo a las necesidades del sistema y no todas las unidades de una central estarán activas todo el tiempo, por lo que es necesario determinar qué unidades deben ponerse en servicio y en qué orden para optimizar económicamente la operación de la central.

Para poder comparar económicamente a las unidades, debemos definir una nueva característica llamada **Costo Específico de Combustible** el que se determina

haciendo el cociente entre el costo de combustible por hora para un valor determinado de generación por la generación. Por ejemplo, la tabla de costo específico de combustible para la unidad representada en la fig. 1 es:

Generación	Costo de combustible	Costo específico de combustible
P	F	F/P
MW	\$/h	\$/MWh
15,0	610,0	40,7
17,5	688,0	39,3
20,0	776,0	38,8
22,5	874,5	38,9
25,0	983,3	39,3
27,5	1102,8	40,1
30,0	1232,8	41,1
32	1371,6	42,9

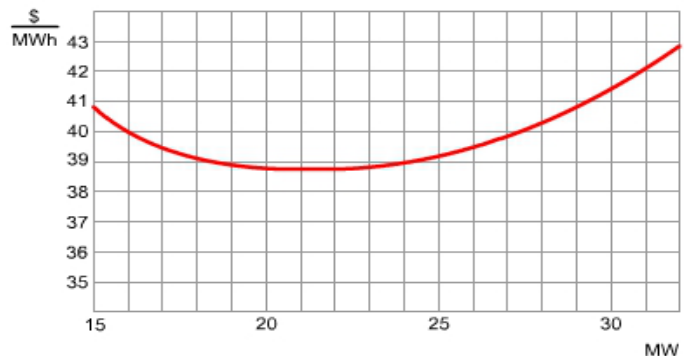


fig. 5

Para determinar el despacho económico se trazan las curvas de costo específico para todas las combinaciones posibles y se eligen las combinaciones que produzcan el menor costo específico para el estado de carga considerado.

Veamos esto con un ejemplo simple de 4 unidades.

Supongamos la unidad 1 igual a la 2 y la 3 igual a la 4. Como ejemplo supongamos que la unidad 2 tiene una generación entre 15 y 32 MW y la 4 entre 10 y 80 MW.

Generación Total	Generación U2	Costo comb. U2	Generación U4	Costo comb. U4	Costo Total U2+U4	Costo esp. Comb. U2+U4
MW	MW	\$/h	MW	\$/h	\$/h	\$/MWh
25	15,00	610	10,00	590	1200	48,00
30	15,00	610	15,00	690	1300	43,33
35	15,00	610	20,00	810	1420	40,57
40	15,50	620	24,50	930	1550	38,75
45	17,00	670	28,00	1040	1710	38,00
50	18,75	725	31,25	1140	1865	37,30
55	20,25	780	34,75	1280	2060	37,45
60	22,00	850	38,00	1400	2250	37,50
65	23,75	930	41,25	1540	2470	38,00
70	25,25	1000	44,75	1680	2680	38,29
75	26,75	1070	48,25	1840	2910	38,80
80	28,50	1160	51,50	2000	3160	39,50
85	30,00	1240	55,00	2210	3450	40,60
90	31,50	1330	58,50	2390	3720	41,33
95	32,00	1340	68,00	2660	4000	42,11
100	32,00	1340	68,00	2980	4320	43,20
105	32,00	1340	73,00	3310	4650	44,29
110	32,00	1340	78,00	3660	5000	45,45
112	32,00	1340	80,00	3810	5150	45,98

Se deberán hacer todas las combinaciones posibles y graficar las características de costo específico de combustible (fig. 6)

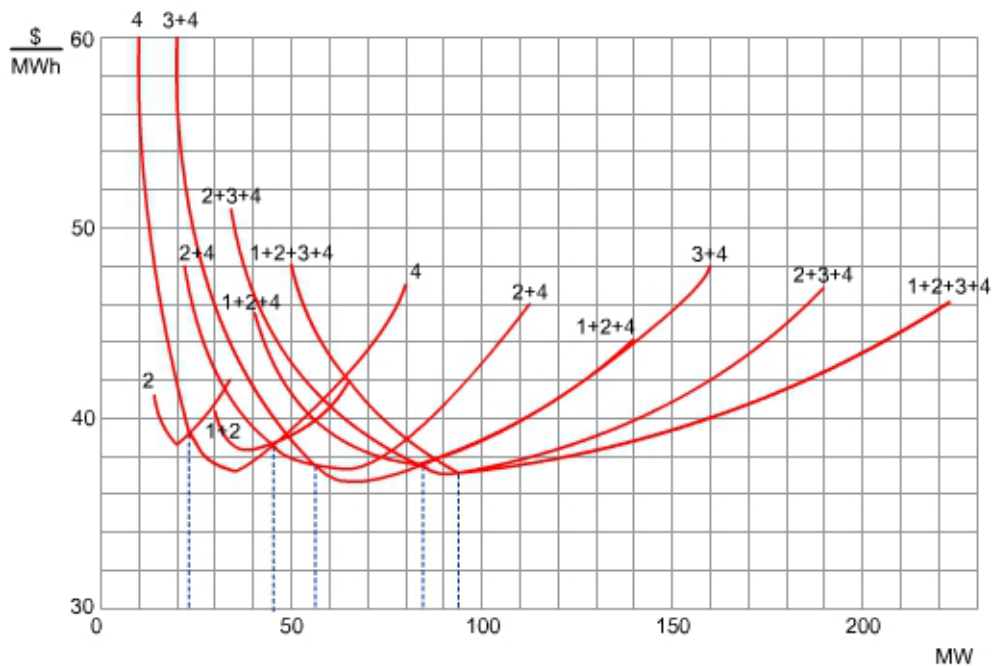


fig. 6

Unidades que deben operarse en función de la carga de la central	
Generación Total [MW]	Combinación de unidades
De 15 a 23	2
De 23 a 44	4
De 44 a 55	2+4
De 55 a 84	3+4
De 84 a 93	2+3+4
De 93 a 220	1+2+3+4

Factores no económicos que intervienen en el despacho económico

1. Reserva rodante de generación para hacer frente a la pérdida de alguna unidad.
2. Necesidad de aumentar rápidamente la generación para hacer frente a variaciones bruscas de carga.
3. Generación de potencia reactiva para controlar el voltaje del sistema.
4. Necesidad de aumentar la generación en algunos puntos del sistema para evitar sobrecargar líneas o transformadores.

Distribución de cargas entre plantas

Cuando se quiere optimizar económicamente un sistema de potencia, hay que tener en cuenta que las centrales no se encuentran geográficamente próximas por lo que deben incluirse en la ecuación económica los costos de la transmisión entre centrales, específicamente las pérdidas de transmisión en las líneas.

La solución matemática es similar a la vista para el caso de unidades dentro de una planta, pero incorporando el costo de las pérdidas por transmisión en función de la generación de las plantas.

Supongamos un sistema con u unidades generadoras conectadas en distintos puntos. Si llamamos P_R a la carga total y P_L a las pérdidas por transmisión:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots + P_u = \sum_{n=1}^u P_n = P_R + P_L \quad [7], \text{ siendo } P_n \text{ la generación de la planta } n$$

y además: $F_T = F_1 + F_2 + \dots + F_n + \dots + F_u = \sum_{n=1}^u F_n \quad [8]$, en donde F_T es el costo total de

operación de la u plantas y F_n el costote operación de la planta n .

Como antes, se debe distribuir la generación (determinar $P_1; P_2; \dots; P_n; \dots P_u$) de

manera que el costo total F_T sea mínimo y además se cumpla: $\sum_{n=1}^u P_n = P_R + P_L$

Restando a F_T al constante nula: $\lambda \cdot (P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots + P_u - P_R - P_L) = 0$, la función no varía y queda:

$$F_T = F_1 + F_2 + \dots + F_n + \dots + F_u - \lambda \cdot (P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots + P_u - P_R - P_L) \quad [9].$$

Las derivadas parciales de F_T respecto de la generación son:

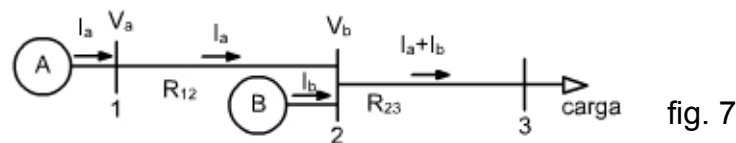
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_T}{\partial P_1} = \frac{dF_1}{dP_1} - \lambda + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_T}{\partial P_2} = \frac{dF_n}{dP_n} - \lambda + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_n} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_T}{\partial P_u} = \frac{dF_u}{dP_u} - \lambda + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_u} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_1}{dP_1} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_1} = \lambda \\ \dots \\ \frac{dF_n}{dP_n} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_n} = \lambda \quad [11] \\ \dots \\ \frac{dF_u}{dP_u} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_u} = \lambda \end{array} \right.$$

La distribución más económica se obtiene resolviendo este sistema de ecuaciones.

Pérdidas de transmisión

El método anterior, requiere una expresión de las pérdidas totales de transmisión en función de la generación de las distintas unidades generadoras.

Vamos a desarrollar esa expresión para un sistema de dos unidades generadoras



Las pérdidas de transmisión del sistema de la fig. 7 están dadas por:

$$P_L = 3 \cdot R_{12} \cdot I_a^2 + 3 \cdot R_{23} \cdot (I_a + I_b)^2 = 3 \cdot (R_{12} + R_{23}) \cdot I_a^2 + 6 \cdot R_{23} I_a \cdot I_b + 3 \cdot I_b^2 \quad [12], \quad \text{en donde:}$$

$$I_a = \frac{P_a}{\sqrt{3} \cdot V_a \cdot \cos \varphi_a} \quad y \quad I_b = \frac{P_b}{\sqrt{3} \cdot V_b \cdot \cos \varphi_b}, \quad \text{sustituyendo:}$$

$$P_L = \left(\frac{R_{12} + R_{23}}{V_a^2 \cdot \cos^2 \varphi_a} \right) \cdot P_a^2 + 2 \cdot \left(\frac{R_{23}}{V_a \cdot V_b \cdot \cos \varphi_a \cdot \cos \varphi_b} \right) \cdot P_a \cdot P_b + \left(\frac{R_{23}}{V_b^2 \cdot \cos^2 \varphi_b} \right) \cdot P_b^2$$

En forma abreviada: $P_L = B_{aa} \cdot P_a^2 + 2 \cdot B_{ab} \cdot P_a \cdot P_b + B_{bb} \cdot P_b^2$ [13], para un sistema de

u unidades: $P_L = \sum_{m=1}^u \sum_{n=1}^u P_m \cdot B_{mn} \cdot P_n$, en forma matricial:

$$P_L = [P_1 \cdot P_2 \dots P_u] \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1u} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{u1} & B_{u2} & \dots & B_{uu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_u \end{bmatrix} \quad [14], \quad \text{la matriz } |B| \text{ es simétrica.}$$

Las pérdidas incrementales de la transmisión, están dadas por:

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_n} = \sum_{m=1}^u 2 \cdot P_m \cdot B_{mn} \quad [14], \quad \text{para el ejemplo de las dos unidades generadoras:}$$

$$P_L = [P_1 \cdot P_2] \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = [B_{11} \cdot P_1 + B_{21} \cdot P_2 + B_{12} \cdot P_1 + B_{22} \cdot P_2] \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$P_L = B_{11} \cdot P_1^2 + B_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + B_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + B_{22} \cdot P_2^2$$

$$P_L = B_{11} \cdot P_1^2 + 2 \cdot B_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + B_{22} \cdot P_2^2$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_n} = 2 \cdot P_1 \cdot B_{11} + 2 \cdot B_{12} \cdot P_2 + 2 \cdot B_{12} \cdot P_1 + 2 \cdot B_{22} \cdot P_2 = \sum_{m=1}^2 2 \cdot P_m \cdot B_{mn}$$

Solución del sistema de ecuaciones

Teniendo en cuenta que la curva de costos incrementales de una unidad puede

representarse por una recta: $\frac{dF_n}{dP_n} = F_{nn} \cdot P_n + f_n$ [15]

F_{nn} = pendiente de la recta que representa los costos incrementales de la unidad n

f_n = ordenada al origen de la recta que representa los costos incrementales de la unidad n.

Sustituyendo las ecuaciones [14] y [15] en la [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{11} \cdot P_1 + f_1 = \lambda \cdot \sum_{m=1}^u 2 \cdot P_m \cdot B_{m1} = \lambda \\ \dots\dots\dots \\ F_{nn} \cdot P_n + f_n = \lambda \cdot \sum_{m=1}^u 2 \cdot P_m \cdot B_{mn} = \lambda \\ \dots\dots\dots \\ F_{uu} \cdot P_u + f_u = \lambda \cdot \sum_{m=1}^u 2 \cdot P_m \cdot B_{mu} = \lambda \end{array} \right. \quad [16]$$

Ejemplo:

Un sistema de dos unidades generadoras tiene los siguientes coeficientes B:

$$B_{11} = 1,028 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{MW}}; \quad B_{12} = -1,7 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{MW}}; \quad B_{22} = 1,12 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{MW}}$$

Los costos incrementales de las unidades están dados por:

$$\frac{dF_1}{dP_1} = 0,1875 \cdot P_1 + 18,75 \frac{\$}{\text{MWh}}$$

$$\frac{dF_2}{dP_2} = 0,625 \cdot P_2 + 31,25 \frac{\$}{\text{MWh}}$$

Se desea conocer qué generación deben proporcionar las unidades 1 y 2 para distintos valores de carga a fin de que el sistema funcione de la manera más económica.

Las pérdidas de transmisión están dadas por :

$$P_L = B_{11} \cdot P_1^2 + 2 \cdot B_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + B_{22} \cdot P_2^2$$

$$P_L = 1,028 \cdot 10^{-3} \cdot P_1^2 - 2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-4} \cdot P_1 \cdot P_2 + 1,12 \cdot 10^{-4} \cdot P_2^2$$

Las pérdidas incrementales de la transmisión correspondientes a cada planta se obtienen derivando parcialmente P_L con respecto a la potencia de cada planta:

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_1} = 2,056 \cdot 10^{-3} \cdot P_1 - 3,4 \cdot 10^{-4} \cdot P_2$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_2} = -3,4 \cdot 10^{-4} \cdot P_1 + 2,24 \cdot 10^{-4} \cdot P_2$$

La distribución más económica se obtiene resolviendo el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_1}{dP_1} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_1} = \lambda \\ \frac{dF_2}{dP_2} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_2} = \lambda \end{array} \right. \quad \text{sustituyendo por los valores anteriores:}$$

$$\begin{cases} 0,1875 \cdot P_1 + 18,75 + \lambda \cdot (2,056 \cdot 10^{-3} \cdot P_1 - 3,4 \cdot 10^{-4} \cdot P_2) = \lambda \\ 0,625 \cdot P_2 + 31,25 + \lambda \cdot (-3,4 \cdot 10^{-4} \cdot P_1 + 2,24 \cdot 10^{-4} \cdot P_2) = \lambda \end{cases}$$

Asignando valores a λ puede obtenerse la solución correspondiente:

λ	P_1	P_2	$P_1 + P_2$	P_L	P_R
\$/MWh	MW	MW	MW	MW	MW
31,25	49,69	0,84	50,53	2,53	48,00
37,50	71,43	11,30	82,73	5,48	77,25
43,75	91,28	21,83	113,11	9,23	103,88
50,00	105,84	32,40	138,24	12,72	125,52
56,25	126,41	43,00	169,41	18,36	151,05
62,50	142,06	53,63	195,69	23,49	172,20
68,75	156,61	64,27	220,88	28,90	191,98

Factores de Penalización

Haciendo la siguiente modificación:

$$\frac{dF_n}{dP_n} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_n} = \lambda; \quad \frac{dF_n}{dP_n} = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_n}\right); \quad \frac{dF_n}{dP_n} + \frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_n}} = \lambda$$

La expresión $\frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_n}} = L_n$ se llama **Factor de Penalización** de la planta n.

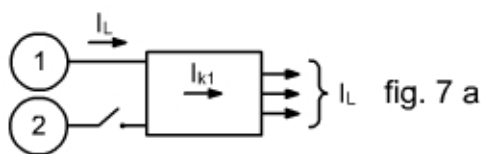
Las ecuaciones [11], pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dF_1}{dP_1} \cdot L_1 = \lambda \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dF_n}{dP_n} \cdot L_n = \lambda \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dF_u}{dP_u} \cdot L_u = \lambda \end{cases} \quad [17]$$

Se obtienen así expresiones similares a las de unidades generadoras dentro de la misma planta, donde el costo incremental de cada unidad está multiplicado por el factor de penalización que depende de las pérdidas de transmisión.

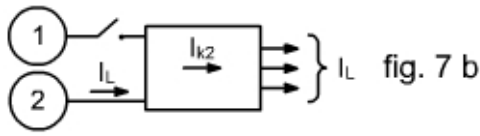
Coeficientes de de pérdida en un sistema de varias ramas

Como en el caso anterior, se hará el desarrollo para un sistema de dos centrales, pudiendo, luego, ampliarlo a n centrales.



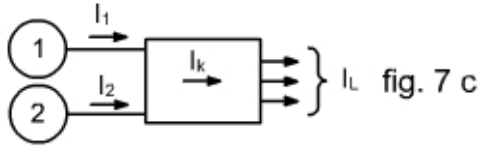
a) Toda la carga es alimentada por la central 1: $N_{k1} = \frac{I_{k1}}{I_L}$

I_{k1} : corriente que circula por la línea k



b) Toda la carga es alimentada por la central 2: $N_{k2} = \frac{I_{k2}}{I_L}$

I_{k2} : corriente que circula por la línea k



c) La carga es alimentada por ambas centrales. Por superposición:

$$I_k = N_{k1} \cdot I_1 + N_{k2} \cdot I_2$$

I_k : corriente que circula por la línea k

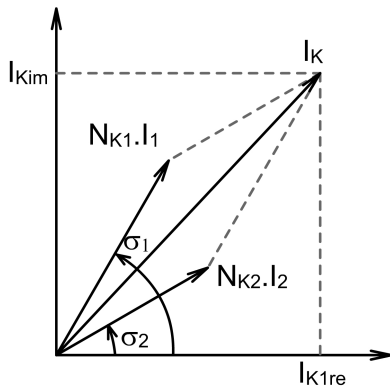
N_{k1} y N_{k2} son los *factores de distribución* de corriente.

Las corrientes generadas son:

$$I_1 = |I_1| \cdot \cos \sigma_1 + j|I_1| \cdot \sin \sigma_1$$

$$I_2 = |I_2| \cdot \cos \sigma_2 + j|I_2| \cdot \sin \sigma_2$$

σ_1 y σ_2 son los ángulos de fase de las corrientes I_1 e I_2 , con respecto a una referencia común



$$|I_{kre}| = N_{k1} \cdot |I_1| \cdot (\cos \sigma_1) + N_{k2} \cdot |I_2| \cdot (\cos \sigma_2)$$

$$|I_{kim}| = N_{k1} \cdot |I_1| \cdot \sin \sigma_1 + N_{k2} \cdot |I_2| \cdot (\sin \sigma_2)$$

$$|I_k|^2 = [N_{k1} \cdot |I_1| \cdot (\cos \sigma_1) + N_{k2} \cdot |I_2| \cdot (\cos \sigma_2)]^2 + [N_{k1} \cdot |I_1| \cdot \sin \sigma_1 + N_{k2} \cdot |I_2| \cdot (\sin \sigma_2)]^2$$

Desarrollando esta expresión y sumando ambos miembros, obtenemos $|I_k|^2$:

$$N_{k1}^2 \cdot |I_1|^2 \cdot \cos^2 \sigma_1 + N_{k2}^2 \cdot |I_2|^2 \cdot \cos^2 \sigma_2 + 2 \cdot N_{k1} \cdot |I_1| N_{k2} \cdot |I_2| \cdot \cos \sigma_1 \cdot \cos \sigma_2$$

$$+ N_{k1}^2 \cdot |I_1|^2 \cdot \sin^2 \sigma_1 + N_{k2}^2 \cdot |I_2|^2 \cdot \sin^2 \sigma_2 + 2 \cdot N_{k1} \cdot |I_1| N_{k2} \cdot |I_2| \cdot \sin \sigma_1 \cdot \sin \sigma_2$$

$$N_{k1}^2 \cdot |I_1|^2 (\underbrace{\cos^2 \sigma_1 + \sin^2 \sigma_1}_1) + N_{k2}^2 \cdot |I_2|^2 (\underbrace{\cos^2 \sigma_2 + \sin^2 \sigma_2}_1) + 2 \cdot N_{k1} \cdot |I_1| N_{k2} \cdot |I_2| \cdot \left(\frac{\cos \sigma_1 \cdot \cos \sigma_2 + \sin \sigma_1 \cdot \sin \sigma_2}{\cos(\sigma_1 - \sigma_2)} \right)$$

$$|I_k|^2 = N_{k1}^2 \cdot |I_1|^2 + N_{k2}^2 \cdot |I_2|^2 + 2 \cdot N_{k1} \cdot |I_1| N_{k2} \cdot |I_2| \cos(\sigma_1 - \sigma_2)$$

I_1 e I_2 , también podemos expresarlas como: $|I_1| = \frac{P_1}{\sqrt{3} \cdot |V_1| \cdot \cos \varphi_1}$ y

$|I_2| = \frac{P_2}{\sqrt{3} \cdot |V_2| \cdot \cos \varphi_2}$, llamando R_k a la resistencia de la rama k , las pérdidas totales

por transmisión serán: $P_L = \sum_k 3 \cdot |I_k|^2 \cdot R_k$

$$P_L = \frac{P_1^2}{|V_1|^2 \cdot \cos^2 \varphi_1} \cdot \sum_k N_{k1}^2 \cdot R_k + \frac{2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \cos(\sigma_1 - \sigma_2)}{|V_1| \cdot |V_2| \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2} \cdot \sum_k N_{k1} \cdot N_{k2} \cdot R_k + \frac{P_2^2}{|V_2|^2 \cdot \cos^2 \varphi_2} \cdot \sum_k N_{k2}^2 \cdot R_k$$

Las pérdidas de potencia, como ya vimos, se expresan como:

$$P_L = P_1^2 \cdot B_{11} + 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot B_{12} + P_2^2 \cdot B_{22}, \text{ por lo tanto:}$$

$$B_{11} = \frac{1}{|V_1|^2 \cdot \cos^2 \varphi_1} \cdot \sum_k N_{k1}^2 \cdot R_k$$

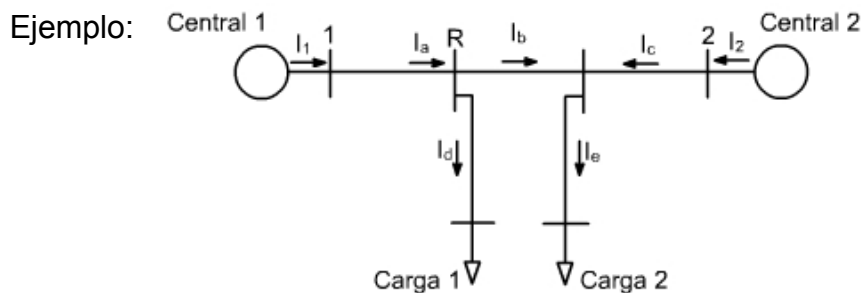
$$B_{12} = \frac{\cos(\sigma_1 - \sigma_2)}{|V_1| \cdot |V_2| \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2} \cdot \sum_k N_{k1} \cdot N_{k2} \cdot R_k$$

$$B_{22} = \frac{1}{|V_2|^2 \cdot \cos^2 \varphi_2} \cdot \sum_k N_{k2}^2 \cdot R_k$$

En general, para m centrales: $P_L = \sum_m \sum_n P_m \cdot B_{mn} \cdot P_n$, $\sum_m$ y $\sum_n$ son sumatorias independientes para tener en cuenta todas las centrales. K es el número de ramas.

La expresión general para los coeficientes es:

$$B_{mn} = \frac{\cos(\sigma_m - \sigma_n)}{|V_m| \cdot |V_n| \cdot \cos \varphi_m \cdot \cos \varphi_n} \cdot \sum_k N_{km} \cdot N_{kn} \cdot R_k$$



La tensión de la barra de referencia (R) es 1 p.u., siendo las corrientes y las impedancias las siguientes

$$I_a = 1,2 - j0,4 \quad - \quad Z_a = 0,02 + j0,08$$

$$I_b = 0,4 - j0,2 \quad - \quad Z_b = 0,08 + j0,32$$

$$I_c = 0,8 - j0,1 \quad - \quad Z_c = 0,02 + j0,08$$

$$I_d = 0,8 - j0,2 \quad - \quad Z_d = 0,03 + j0,12$$

$$I_e = 1,2 - j0,3 \quad - \quad Z_e = 0,03 + j0,12$$

Las corrientes de Carga son 0,4 en la carga 1 y 0,6 en la Carga 2, por lo que $I_L = 1$.
Calcular los coeficientes de pérdidas en $\%$ y en MW^{-1} para una base de 50 MW.

Suponiendo que toda la carga es alimentada por la Central 1:

$$I_a = 1; \quad I_b = 0,6; \quad I_c = 0; \quad I_d = 0,4; \quad I_e = 0,6$$

$$N_{a1} = \frac{I_a}{I_L} = 1; \quad N_{b1} = \frac{I_b}{I_L} = 0,6; \quad N_{c1} = \frac{I_c}{I_L} = 0; \quad N_{d1} = \frac{I_d}{I_L} = 0,4; \quad N_{e1} = \frac{I_e}{I_L} = 0,6$$

Suponiendo que toda la carga es alimentada por la Central 2:

$$I_a = 0; \quad I_b = -0,4; \quad I_c = 1; \quad I_d = 0,4; \quad I_e = 0,6$$

$$N_{a2} = \frac{I_a}{I_L} = 0; \quad N_{b2} = \frac{I_b}{I_L} = -0,4; \quad N_{c2} = \frac{I_c}{I_L} = 1; \quad N_{d2} = \frac{I_d}{I_L} = 0,4; \quad N_{e2} = \frac{I_e}{I_L} = 0,6$$

Las tensiones en las barras de generación son:

$$V_1 = V_R + I_a \cdot Z_a = 1 + (1,2 - j0,4) \cdot (0,02 - j0,08) = 1,056 + j0,088 = 1,06 \angle 4,76^\circ$$

$$V_2 = V_R - I_b \cdot Z_b + I_c \cdot Z_c = 1 - (0,4 - j0,2) \cdot (0,08 - j0,32) + (0,8 - j0,1) \cdot (0,02 - j0,08)$$

$$V_2 = 0,028 - j0,5 = 0,93 \angle -3,08^\circ$$

Los ángulos de fase de las corrientes en las centrales son:

$$\sigma_1 = \arctg \frac{-0,4}{1,2} = -18,43^\circ; \quad \sigma_2 = \arctg \frac{-0,1}{0,8} = -7,13^\circ, \quad \text{entonces: } \cos(\sigma_2 - \sigma_1):$$

$\cos(-7,13 + 18,43) = 0,98$ y los $\cos \varphi$ de las centrales:

$$S = V \cdot I^* \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi_1 = \cos(4,76 + 18,43) = 0,919 \\ \cos \varphi_2 = \cos(7,13 - 3,08) = 0,998 \end{cases}$$

Aplicando la expresión general para los coeficientes:

$$B_{11} = \frac{\cos(\sigma_1 - \sigma_1)}{|V_1| \cdot |V_1| \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \cdot (N_{a1} \cdot N_{a1} \cdot R_a + N_{b1} \cdot N_{b1} \cdot R_b + N_{c1} \cdot N_{c1} \cdot R_c + N_{d1} \cdot N_{d1} \cdot R_d + N_{e1} \cdot N_{e1} \cdot R_e)$$

$$B_{11} = \frac{1}{|1,06|^2 \cdot (0,919)^2} \cdot (1^2 \cdot 0,02 + 0,6^2 \cdot 0,08 + 0,4^2 \cdot 0,03 + 0,6^2 \cdot 0,03) = 0,0678$$

$$B_{12} = \frac{\cos(\sigma_2 - \sigma_1)}{|V_1| \cdot |V_2| \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2} \cdot (N_{a1} \cdot N_{a2} \cdot R_a + N_{b1} \cdot N_{b2} \cdot R_b + N_{c1} \cdot N_{c2} \cdot R_c + N_{d1} \cdot N_{d2} \cdot R_d + N_{e1} \cdot N_{e2} \cdot R_e)$$

$$B_{12} = \frac{(0,98)}{1,06 \cdot 0,93 \cdot 0,998 \cdot 0,92} \cdot (-0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,08 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,03 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,03) = -0,004$$

$$B_{22} = \frac{\cos(\sigma_2 - \sigma_2)}{|V_2| \cdot |V_2| \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2} \cdot (N_{a2} \cdot N_{a2} \cdot R_a + N_{b2} \cdot N_{b2} \cdot R_b + N_{c2} \cdot N_{c2} \cdot R_c + N_{d2} \cdot N_{d2} \cdot R_d + N_{e2} \cdot N_{e2} \cdot R_e)$$

$$B_{22} = \frac{1}{(0,93)^2 \cdot (0,998)^2} \cdot (1^2 \cdot 0,02 + 0,4^2 \cdot 0,08 + 0,4^2 \cdot 0,03 + 0,6^2 \cdot 0,03) = 0,0562$$

Los coeficientes en valor absoluto son:

$$B_{11} = \frac{B_{11} \frac{\circ}{1}}{S_b} = \frac{0,0678}{50} = 0,1356 \cdot 10^{-2} \text{MW}^{-1}$$

$$B_{12} = \frac{B_{12} \frac{\circ}{1}}{S_b} = \frac{-0,004}{50} = -0,008 \cdot 10^{-2} \text{MW}^{-1}$$

$$B_{22} = \frac{B_{22} \frac{\circ}{1}}{S_b} = \frac{0,0562}{50} = 0,1124 \cdot 10^{-2} \text{MW}^{-1}$$